Meno a priezvisko:
Škola: Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium
Predmet: Fyzika
Školský rok/blok: /
Skupina:
Trieda:
Dátum:

Teória

2 Mechanické kmitanie a vlnenie

2.1 Mechanické kmitanie

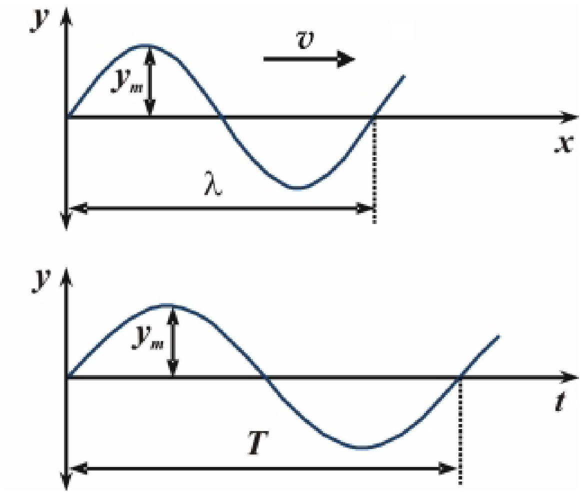
2.1.0 Úvod, základné pojmy, kmitavý pohyb

V tejto kapitole sa oboznámime s ďalším pohľadom na svet okolo nás. Budeme sa zaoberať mechanickým kmitaním a vlnením. Veľkú pozornosť si zasluhuje zvuk a javy s ním súvisiace.

Po vhodení kameňa do bazénu alebo do jazera, šíri sa z miesta dopadu kruhová vlna, ako na obrázku. Vlna sa tiež šíri pozdĺž hadice v záhrade, ak jej koncom kmitáme hore-dolu. Vlna na vodnej hladine a vlna na hadici sú dva bežné príklady vlnenia. Neskôr sa môžeme zaoberať aj inými druhmi vlnenia – napríklad svetlom alebo vlnením ktoré patrí k letiacemu elektrónu. Zatiaľ sa však obmedzíme na **mechanické vlnenie**.

Isto ste už sedeli na brehu jazera a zdalo sa vám, že vlny, ktoré sa šíria smerom ku brehu, prinášajú naň vodu. Nie je to však celkom tak. Vlny sa šíria istou rýchlosťou, zatiaľ čo časti vodnej hladiny iba kmitajú okolo rovnovážnej polohy. Vlna nespôsobuje pohyb listu padnutého na hladinu v smere jej šírenia. List iba kmitá okolo rovnovážnej polohy. Toto je všeobecná vlastnosť vlnenia. *Vlnenie sa môže šíriť na veľké vzdialenosti, ale prostredie (voda, hadica) koná iba obmedzený pohyb – bod prostredia kmitá okolo rovnovážnej polohy*. Vlnenie sa šíri bez toho, aby nieslo so sebou aj časti prostredia.

Zdrojom vlnenia je teda kmitanie, a je to zároveň kmitanie, čo sa šíri prostredím a vytvára vlnenie. Ak zdroj kmitá harmonicky (časová závislosť je sínusoida s určitou frekvenciou) a prostredie je dokonale pružné, aj vzniknuté vlnenie je **harmonické**. Ak sa na takéto vlnenie pozrieme v ľubovoľnom okamihu (napr. ak takéto vlnenie odfotíme), vlnenie má tvar sínusoidy. Na druhej strane, ak sa pozrieme na pohyb jedného bodu, grafom závislosti výchylky z rovnovážnej polohy od času je tiež sínusoida.



Kmitavý pohyb (mechanické kmitanie) je po pohyboch priamočiarych a krivočiarych tretím základným typom pohybu, s ktorým sa stretávame v prírode aj technickej praxi.

Príklady kmitavých pohybov sú napríklad pulz srdca, chvenie v bubienku ucha pri prijímaní zvuku, kyvadlo, piest automobilu, vysielanie a príjem signálu rozhlasu, televízie, ...

Základným pojmom je mechanický oscilátor. **Mechanický oscilátor je zariadenie, ktoré voľne kmitá.**

Podmienka, aby oscilátor kmital voľne znamená, že má kmitať bez vonkajšieho pôsobenia. Budeme sa zaoberať aj situáciou, keď bude oscilátor kmitať vplyvom vonkajšej sily, ale to nie je všeobecný prípad. Mechanickým oscilátorom môže byť srdce, pružina v automobile, kyvadlo hodín, mobil zavesený na šnúrke na krku, skokan bungee-jumpingu, ...

Rozlišujeme dva „špeciálne" typy mechanických oscilátorov. Ich „špeciálnosť" sa prejavuje v ich jednoduchom opise. Ďalšie typy oscilátorov sú na opis výrazne komplikovanejšie.

1. **Teleso zavesené na pružine** – kmitanie je spôsobené silou pružnosti.
2. **Kyvadlo** – kmitanie je spôsobené tiažovou silou.

Pre ďalší opis je dôležité poznať pojem **rovnovážna poloha**. **Rovnovážna poloha je taká poloha mechanického oscilátora, pri ktorej sú všetky pôsobiace sily na oscilátor v rovnováhe.** Je to poloha, v ktorej sa mechanický oscilátor zastaví a samovoľne (t.j. bez konania práce z okolia) z nej nevyjde.

Trajektóriou pohybu mechanického oscilátora je buď úsečka alebo časť krivky. O úsečku sa jedná v prípade kmitania telesa zaveseného na pružine. Časť kružnice opisuje napríklad kyvadlo hodín. Krivku opisuje napríklad skokan bungee-jumpingu, ktorý koná zložitejší pohyb: kmitá na pružine (pružnom lane), ale zároveň sa kýve ako kyvadlo.

Závislosť okamžitej polohy kmitajúceho telesa na čase zobrazujeme ako časový diagram. Z neho vidieť, že:

1. Teleso prejde v rovnakých časových intervaloch rôzne dráhy – **kmitavý pohyb je teda pohyb nerovnomerný**.
2. Kmitajúce teleso vždy po určitej dobe dospeje do rovnakej polohy. Periodicky sa opakujúca časť kmitavého pohybu sa nazýva **kmit**.

2.1.1 Periodické deje, kmitanie

Dôležitým druhom fyzikálnych dejov sú **periodické deje** – sú to deje, pri ktorých sa fyzikálna sústava pravidelne dostáva do toho istého stavu charakterizovaného istými fyzikálnymi veličinami. Najmenší súbor stavov, ktorého opakovaním vznikne periodický dej, sa nazýva **kmit**.

Kmity mechanického oscilátora (aj ľubovoľného periodického pohybu) je možné charakterizovať pomocou:

1. **Periódy (doby kmitu)** T - čas, za ktorý prebehne jeden kmit a oscilátor dospeje do rovnakej polohy ako v počiatočnom čase; $[T] = s$.
2. **Frekvencie (kmitočtu)** f - je daná počtom kmitov za jednu sekundu. $f = \frac{1}{T}$; $[f] = \frac{1}{[T]} = 1s^{-1} = 1Hz$. V súvislosti s kmitaním kyvadiel sa uvádza ešte **doba kyvu** τ.

   Doba kyvu τ je čas, ktorý je rovný polovici periódy, t.j. platí: $\tau = \frac{T}{2}$. Oscilátor teda prejde za jeden kyv polovičnú dráhu ako pri dráhe prejdenej za jeden kmit. 1kmit=2kyvy.

Príklady niektorých kmitavých pohybov a ich frekvencií zobrazuje tabuľka:

Periodický dej	$f[Hz]$	**Periodický dej**	$f[Hz]$	**Periodický dej**	$f[Hz]$
Ľudské srdce	1,25	Tón časového signálu v rozhlase	1000	Kmitanie procesoru počítača	2.10^9
Striedavý prúd v elektrickej sieti	50	Kmitanie kryštálu v hodinkách	$3,3.10^4$	Signál družicovej televízie	12.10^9
Zvuk tónu a^1	440				

Perióda alebo **doba kmitu** T je najkratšia doba, po ktorej sa dej periodicky opakuje. Jej jednotkou je jedna sekunda. Fyzikálny dej je periodický s periódou T, ak jeho charakteristická veličina $v(t)$ je periodickou funkciou času, t.j.

$$v(t) = v(t + kT)$$

kde k je celé číslo. Prevrátená hodnota periódy je **frekvencia** $f = \frac{1}{T}$. Frekvencia je veličina, ktoré určuje počet kmitov za sekundu. Jednotkou je hertz $[Hz]$: $[f] = \frac{1}{[T]} = 1s^{-1} = 1Hz$. **Jeden hertz** je frekvencia periodického deja, ktorého perióda je $1s$. Veličina $\omega = 2\pi f$ sa nazýva **uhlová frekvencia**.

Periodické deje sa nazývajú **kmitanie**. Presnejšie povedané, periodické deje sa **nazývajú periodické kmitanie** a za kmitanie vo všeobecnosti považujeme aj niektoré neperiodické deje. V ďalšom, ak nepovieme ináč, budeme kmitanie chápať ako periodické kmitanie.

Kmitajúca sústava sa nazýva **oscilátor**. Ak veličina $v(t)$ opisujúca kmitanie závisí od času podľa funkcie sínus, teda

$$v(t) = v_m \sin(\omega t + \varphi)$$

nazýva sa kmitanie **harmonické** a oscilátor sa nazýva **harmonický oscilátor**. Hodnota v_m sa nazýva amplitúda veličiny v, veličina $\omega t + \varphi$ je fáza, φ je počiatočná fáza veličiny v.

Kmitanie oscilátora, ktorý po dodaní energie ponecháme na seba, sa nazýva **vlastné kmitanie**.

Frekvencia (perióda) vlastného kmitania sa nazýva **vlastná frekvencia (perióda)** oscilátora.

2.1.2 Kmitavý pohyb

Špeciálnym prípadom kmitania je kmitavý pohyb. Kmitavý pohyb je mechanický pohyb sústavy charakterizovaný veličinami, ktoré sú periodickými funkciami času. Fyzikálna sústava konajúca

kmitavý pohyb sa nazýva **mechanický oscilátor** – napríklad hmotný bod pohybujúci sa rovnomerne po kružnici, závažie na pružine, guľôčka na niti, tyč otáčavá okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom.
Kmitavý pohyb hmotného bodu je pohyb, pri ktorom sa hmotný bod pohybuje okolo tzv. rovnovážnej polohy tak, že kinematické veličiny opisujúce pohyb sú periodickými funkciami času. Rovnovážna poloha je poloha, ktorej zodpovedá minimum potenciálnej energie. Kmitavý pohyb hmotného bodu kinematicky opisujeme polohovým vektorom $\vec{r}(t)$ bodu vzhhľadom na rovnovážnu polohu. Ak hmotný bod koná kmitavý pohyb na priamke, nazýva sa **lineárny oscilátor** – napríklad závažie na pružine.

Kmitavý pohyb lineárneho oscilátora kinematicky opisujeme okamžitou výchylkou $y(t)$ z rovnovážnej polohy, okamžitou rýchlosťou $v(t)$ a okamžitým zrýchlením $a(t)$. Graf závislosti okamžitej výchylky od času je časový diagram kmitavého pohybu.

2.1.3 Harmonické kmitanie

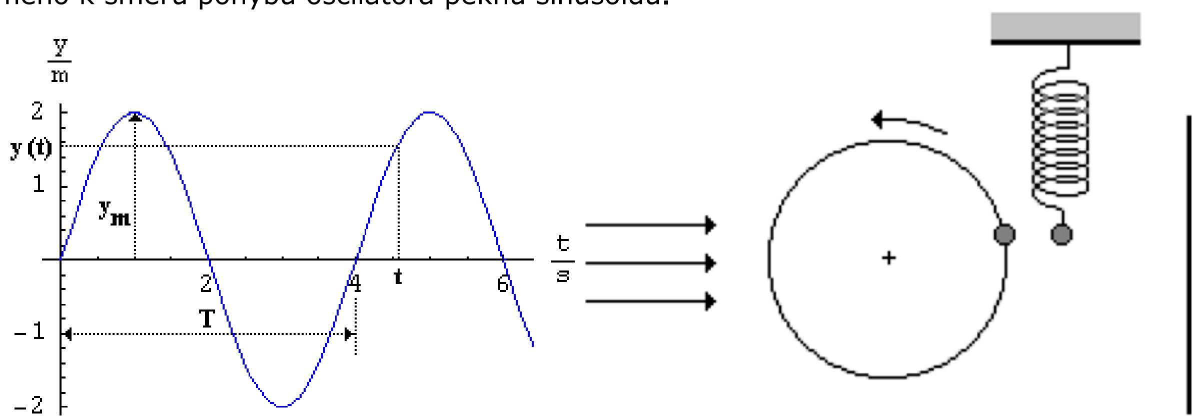
Kinematicky opísať kmitavý pohyb znamená vyjadriť **okamžitú polohu mechanického oscilátora v závislosti od času**. Budeme opisovať telesá **zanedbateľných rozmerov**, ktoré **kmitajú v smere osi** y a ktoré majú **rovnovážnu polohu v počiatku súradnicovej sústavy**.

V prípade opisu kmitavého pohybu telesa, ktorého rozmery nie je možné v zvolenej sústave zanedbať, je rozumnejšie opisovať pohyb **ťažiska tohoto telesa** a nie celého telesa.

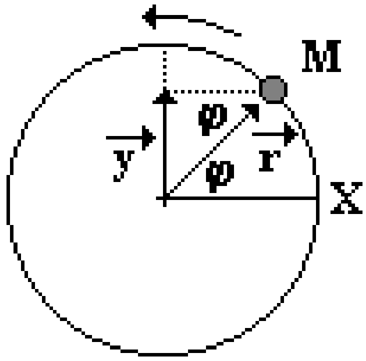
Ak mechanický oscilátor kmitá, je jeho okamžitá poloha určená súradnicou y, ktorá sa nazýva **okamžitá výchylka**. Okamžitá výchylka sa mení v čase v závislosti na funkcii **sinus** – nadobúda kladné a záporné hodnoty.

Absolútna hodnota najväčšej výchylky sa nazýva **amplitúda výchylky** (maximálna výchylka) y_m.

Fakt, že grafom závislosti okamžitej výchylky od času je sínusoida je možné overiť napríklad tak, že rozkmitáme závažie na pružime a budeme s ním kráčať. Takto dostaneme z pohľadu kolmého k smeru pohybu oscilátora peknú sínusoidu.

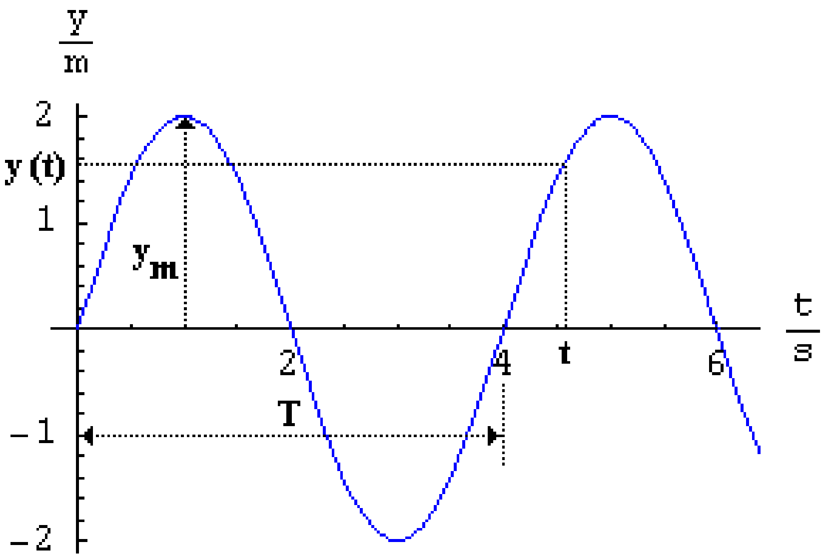


Vzťah pre okamžitú výchylku nájdeme porovnaním kmitavého pohybu s pohybom po kružnici. Gulička pevne pripevnená na rotujúcej platni aj gulička na pružine vrhajú na tienidlo tieň. „Zariadenie" je možné synchronizovať tak, že tiene oboch guličiek na tienidle sa pohybujú zhodne (tiene sa prekrývajú). **Kmitavému pohybu teda zodpovedá priemet pohybu rovnomerného pohybu po kružnici do zvislej roviny.** Pomocou tejto úvahy je možné ľahko odvodiť rovnicu pre okamžitú výchylku.



Na obrázku je znázornený hmotný bod M, ktorý sa pohybuje po kružnici stálou uhlovou rýchlosťou s veľkosťou ω. Okamžitá poloha bodu M je určená polohovým vektorom $\vec{r}$, ktorý zviera s osou x uhol φ. Hmotný bod M bol v čase $t = 0$ v bode X, teda v tomto čase je $\varphi = 0$. V čase $t > 0$ platí $\varphi = \omega t$. Priemet okamžitých výchyliek vektora $\vec{r}$ do osi y je vektor $\vec{y}$ určujúci okamžitú výchylku hmotného bodu. Pre okamžitú výchylku y (veľkosť vektora $\vec{y}$) platí: $y = r.\sin\varphi$

Zrovnáme tieň hmotného bodu M s tieňom kmitajúcej guličky zavesenej na pružine. Ak sa nachádza hmotný bod M v najvyššom bode kružnice, je kmitajúca gulička (ktorej pohyb je s bodom M synchronizovaný) práve v amplitúde svojho pohybu. Preto polomeru r zodpovedá amplitúda y_m. Je možné pre okamžitú výchylku y napísať: $y = y_m.\sin\omega t$. Uhol φ sa nazýva **fáza kmitavého pohybu** a určuje jednoznačne okamžitú výchylku. V prípade kmitavých pohybov sa používa pre ω termín **uhlová frekvencia** a platí $\omega = 2.\pi.f = \dfrac{2.\pi}{T}$



Graf zobrazený na obrázku zodpovedá kmitavému pohybu, ktorý má amplitúdu výchylky $2m$ a periódu $4s$. Okamžitú výchylku v závislosti na čase je možné opísať rovnicou

$$y = 2.\sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

V týchto rovniciach býva zvykom nedosadzovať za π hodnotu $3{,}1415926...$, ale nechať v rovnici symbol π. Je to výhodnejšie pre ďalšie výpočty, pre zakreslovanie grafov, ...

Jedinou neznámou (premennou) v tejto rovnici je čas t. Pokiaľ by sme potrebovali vypočítať napríklad okamžitú výchylku v čase $t_1 = 0{,}5s$, stačí do rovnice dosadiť

$$y = 2.\sin\left(\frac{2\pi}{4}t_1\right) = 2.\sin\left(\frac{\pi}{2}.0{,}5\right)m = 2.\sin\frac{\pi}{4}m = 2.\frac{\sqrt{2}}{2}m \doteq 1{,}41m$$

Periodický pohyb, ktorého grafom závislosti okamžitej výchylky na čase je sínusoida, sa nazýva harmonický pohyb.

Pod sínusoidou rozumieme základný graf funkcie $y = \sin x$ vrátane jeho ľubovoľného posunu po ľubovoľnej ose.

2.1.3 Harmonický kmitavý pohyb – rýchlosť a zrýchlenie harmonického kmitavého pohybu

Najjednoduchším kmitavým pohybom hmotného bodu na priamke je **harmonický kmitavý pohyb**. Je to taký kmitavý pohyb, pri ktorom okamžitá výchylka $y(t)$ závisí od času podľa funkcie sínus, teda

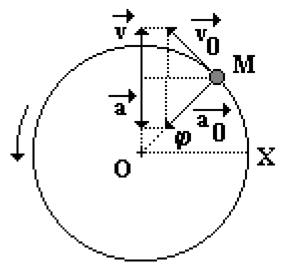
$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

kde y_m je amplitúda okamžitej výchylky y, veličina ω je uhlová frekvencia, φ_0 je počiatočná fáza. Časový diagram harmonického kmitavého pohybu je sínusoida. Ak $y = 0$, hmotný bod je v rovnovážnej polohe, ak $y = \pm y_m$, hmotný bod je v krajnej polohe. Pre okamžitú rýchlosť a zrýchlenie platí:

$$v(t) = \omega y_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$a(t) = -\omega^2 y(t) = -\omega^2 y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Okamžité zrýchlenie má opačný smer ako okamžitá výchylka. V rovnovážnej polohe je okamžitá rýchlosť maximálna, má hodnotu $v_m = \omega y_m$, v krajnej polohe je $v = 0$. Okamžité zrýchlenie má amplitúcu $a_m = -\omega^2 y_m$ v krajnej polohe, v rovnovážnej polohe $a = 0$.

Rýchlosť kmitavého pohybu telesa je maximálna vtedy, keď teleso prechádza rovnovážnou polohou (t.j. $y = 0$). Naopak, nulová rýchlosť je v bodoch, v ktorých dosahuje oscilátor maximálnu výchylku, t.j. $y = \pm y_m$. Rovnicu pre rýchlosť kmitavého pohybu odvodíme opäť na základe analógie s pohybom po kružnici. Vektor rýchlosti $\vec{v}_0$ rovnomerného pohybu po kružnici má smer dotyčnice v každom bode trajektórie a veľkosť $v = \omega r$. Rýchlosť kmitavého pohybu je priemetom vektoru $\vec{v}_0$ do osi y.

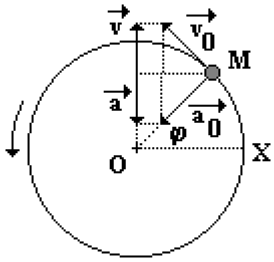


Z obrázku vyplýva: $v = v_0 \cos\varphi = \omega r \cos\omega t = \omega y_m \cos\omega t = v_m \cos\omega t$, kde $v_m = \omega y_m$ je maximálna veľkosť rýchlosti kmitajúceho oscilátora.

Vektor zrýchlenia $\vec{a}_0$ rovnomerného pohybu po kružnici smeruje do stredu kružnice a má veľkosť $a_0 = \omega^2 r$. Zrýchlenie $\vec{a}$ kmitavého pohybu je priemetom vektora $\vec{a}_0$ do osi y. Vektor $\vec{a}$ má opačný smer ako je smer vektora $\vec{y}$, preto má vektor zrýchlenia opačné znamienko ako okamžitá výchylka y.

Zrýchlenie kmitajúceho bodu mieri vždy do rovnovážnej polohy – do polohy, v ktorej sa pohyb nakoniec ustáli. Do tejto polohy „ťahá" oscilátor sila, ktorej smer je (podľa 2. Newtonovho zákona) rovnaký ako smer zrýchlenia, ktoré danému telesu (kmitajúcemu bodu) udeľuje.

A okamžitá výchylka sa meria vždy z rovnovážnej polohy - teda opačne ako je smer zrýchlenia.



Na základe obrázku dostávame:

$$a = -a_0 \sin \omega t = -\omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 y_m \sin \omega t = -\omega^2 y$$

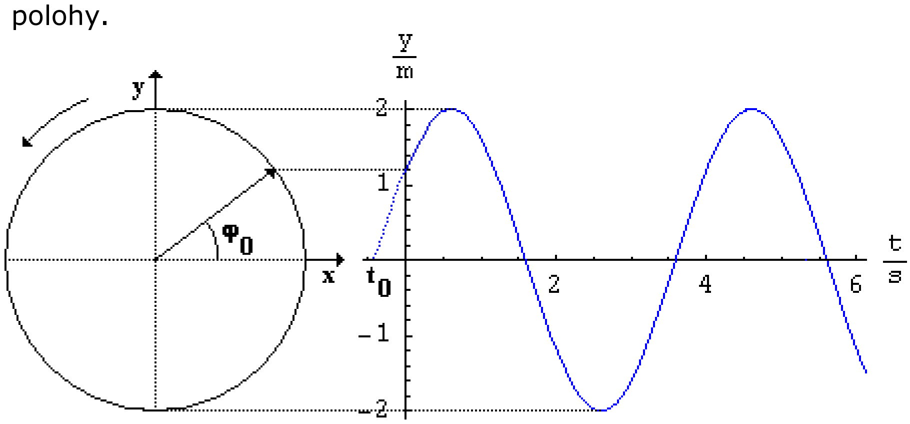
Zrýchlenie harmonického pohybu je priamo úmerné okamžitej výchylke a má v každom okamihu opačný smer ako je smer okamžitej výchylky.

Zrýchlenie je maximálne práve vtedy, keď $|y| = y_m$, nulové je v rovnovážnej polohe.

Použitím diferenciálneho počtu je možné vzťah pre závislosť rýchlosti resp. zrýchlenia od času odvodiť jednoduchšie. Stačí si uvedomiť, že pre veľkosť rýchlosti platí vzťah $v = \frac{ds}{dt}$. V prípade pohybu oscilátora môžeme písať: $v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y_m \sin \omega t) = \omega y_m \cos \omega t$. Analogicky pre veľkosť zrýchlenia je možné písať: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega y_m \cos \omega t) = -\omega^2 y_m \sin \omega t$

2.1.4 Fáza harmonického kmitavého pohybu

Nie všetky kmitania začínajú vykonávať svoj kmitavý pohyb v počiatočnom okamihu z rovnovážnej polohy.



Pri takomto kmitaní je zrejmé, že oscilátor prechádzal rovnovážnou polohou pred začiatkom merania času – prechádzal rovnovážnou polohou pred začiatkom merania času – teda prechádzal rovnovážnou polohou o čas t_0 skôr.

Inými slovami: Oscilátor sme najskôr rozkmitali a až neskôr po čase t_0 sme spustili „záznamové zariadenie", ktoré zaznamenáva jeho okamžitú výchylku v závislosti od času.

Môžeme napísať vzťah:

$$y = y_m \sin(\omega.(t + t_0)) = y_m \sin(\omega.t + \omega.t_0) = y_m \sin(\omega.t + \varphi_0)$$

kde φ_0 je **počiatočná fáza kmitavého pohybu**, ktorá určuje hodnotu okamžitej výchylky (rýchlosti, zrýchlenia) v počiatočnom okamihu. Poloha hmotného bodu konajúceho rovnomerný pohyb po kružnici by bola znázornená vektorom, ktorý zviera s osou x uhol φ_0 v čase $t = 0$.
Pozn.: Podľa potrieb označujeme počiatočnú fázu kmitavého pohybu φ_0 alebo φ.

Z grafu na obrázku môžeme určiť čas t_0, v ktorom oscilátor prechádzal rovnovážnou polohou, pomerne jednoducho. Stačí si uvedomiť, že argument goniometrickej funkcie musí byť v tom okamihu nulový, t.j. musí platiť $\omega t_0 + \varphi_0 = 0$. Odtiaľ $t_0 = -\dfrac{\varphi_0}{\omega}$.

Súvislosť kmitavého pohybu s rovnomerným pohybom po kružnici sa využíva k symbolickému znázorneniu veličín kmitavého pohybu (periodických dejov). Veličina je znázornená vektorom, ktorého dĺžka je úmerná veľkosti veličiny, a poloha v pravouhlej sústave súradníc je určená počiatočnou fázou veličiny. Toto symbolické znázornenie veličín kmitavých dejov sa nazýva **fázory**, ktoré sa znázorňujú vo fázorovom diagrame. S fázormi pracujeme rovnako ako s vektormi.

Po definovaní počiatočnej fázy kmitavého pohybu môžme napísať skôr odvodené vzťahy nasledovne:

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$v(t) = \omega y_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$a(t) = -\omega^2 y(t) = -\omega^2 y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Počiatočná fáza výchylky, rýchlosti a zrýchlenia sú rovnaké !

Fázový rozdiel

Ak majú dve harmonické veličiny rovnakú uhlovú frekvenciu a rôzne počiatočné fázy φ_{01} a φ_{02}, môžeme určiť ich fázový rozdiel $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

Fázový rozdiel používame pre posúdenie vzájomných vzťahov fyzikálnych veličín (nielen) kmitavého pohybu.

Na základe odvodených vzťahov závislosti okamžitej výchylky od času, veľkosti okamžitej rýchlosti od času, veľkosti zrýchlenia od času a na základe vlastností goniometrických funkcií môžeme písať, že napríklad rýchlosť je fázovo posunutá o $\dfrac{\pi}{2}$ vzhľadom na výchylku.

Existujú „špeciálne prípady" fázových rozdielov:

1. Ak $\Delta\varphi = 2k\pi$; $k \in N_0$ - obe veličiny majú **rovnakú fázu**

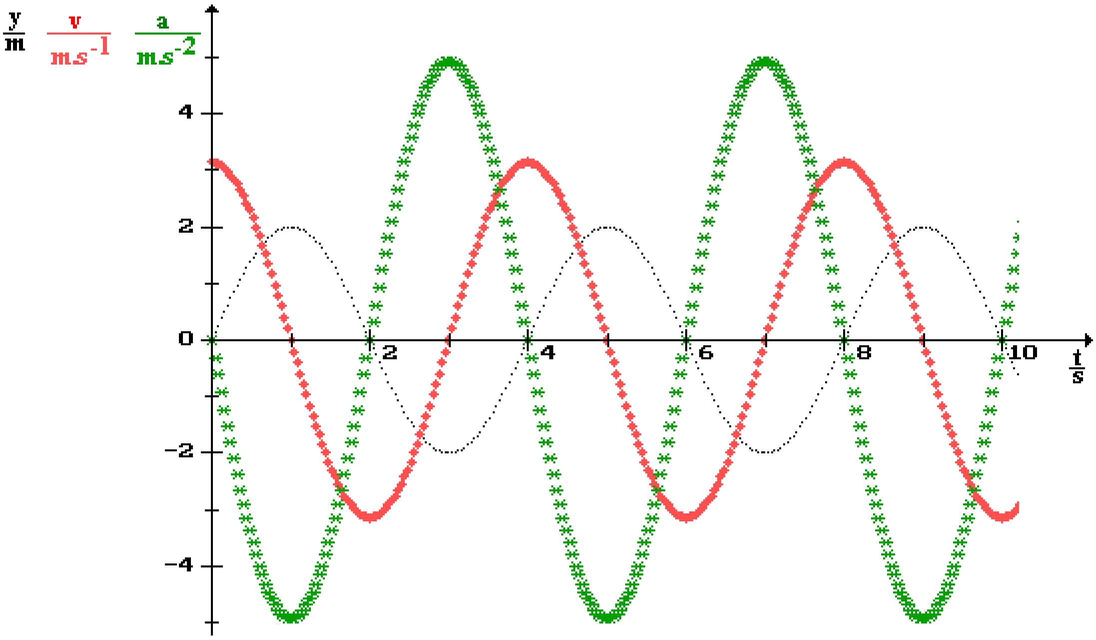
2. Ak $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$; $k \in N_0$ - obe veličiny majú **opačnú fázu**

Príklad:

Napíšte rovnicu harmonického kmitavého pohybu s amplitúdou výchylky $10cm$, periódou $0{,}01s$ a začiatočnou fázou $\dfrac{\pi}{6}$.

2.1.5 Grafy opisujúce pohyb mechanického oscilátora

Pre jednoduchšie pochopenie a zobrazenie vzájomných väzieb sú na obrázku znázornené grafy, ktoré vyjadrujú časovú závislosť veličín charakterizujúcich mechanický oscilátor:



1. $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ ... graf závislosti okamžitej výchylky od času
2. $v(t) = \omega y_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ ♦ graf závislosti okamžitej rýchlosti od času
3. $a(t) = -\omega^2 y(t) = -\omega^2 y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ ⁎ graf závislosti okamžitého zrýchlenia od času

Obrázok je zakreslený pre tieto hodnoty: $T = 4s$; amplitúda výchylky $y_m = 2m$; počiatočná fáza $\varphi_0 = 0$.

V tabuľke sú uvedené význačné hodnoty okamžitej výchylky, veľkosti okamžitej rýchlosti a veľkosti okamžitého zrýchlenia v rámci jednej periódy. Časové okamihy sú počítané pre všeobecný prípad – ak rovnica okamžitej výchylky má tvar $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$. Z nej je možné vypočítať čas t_0 priechodu mechanického oscilátora rovnovážnou polohou (t.j. okamih, kedy po prvý krát bude $y = 0$): $0 = y_m \sin(\omega t_0 + \varphi_0)$, odtiaľ: $0 = \sin(\omega t_0 + \varphi_0)$. Z vlastnosti funkcie sínus vyplýva $0 = \omega t_0 + \varphi_0$, odkiaľ pre čas priechodu mechanického oscilátora rovnovážnou polohou dostávame: $t_0 = \frac{\varphi_0}{\omega}$.

Maximálne hodnoty uvedené v tabuľke pri čítaní daného riadku postupne striedajú znamienka:

	Časový okamih (v jednej perióde)				
	$\frac{\varphi_0}{\omega}$	$\frac{\varphi_0}{\omega} + \frac{T}{4}$	$\frac{\varphi_0}{\omega} + \frac{T}{2}$	$\frac{\varphi_0}{\omega} + \frac{3T}{4}$	$\frac{\varphi_0}{\omega} + T$
Okamžitá výchylka	nulová	maximálna	nulová	maximálna	nulová
Veľkosť okamžitej rýchlosti	maximálna	nulová	maximálna	nulová	maximálna
Veľkosť okamžitého zrýchlenia	nulová	maximálna	nulová	maximálna	nulová

2.1.6 Energia harmonického kmitavého pohybu

Uvažujme hmotný bod s hmotnosťou m konajúci harmonický kmitavý pohyb s rovnicou $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi)$. V čase t má hmotný bod kinetickú energiu

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 y_m^2 . \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Ak hladinu nulovej potenciálnej energie zvolíme v rovnovážnej polohe, tak potenciálna energia v čase t bude

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 y_m^2.\sin^2(\omega t + \varphi)$$

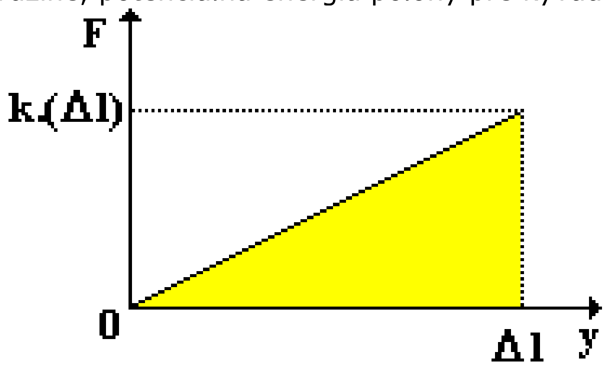
Potom celková mechanická energia hmotného bodu konajúceho harmonický kmitavý pohyb bude

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 y_m^2$$

Pri harmonickom kmitavom pohybe je celková mechanické energia stála, mení sa iba kinetické energia na potenciálnu a naopak.

Uvedený poznatok platí iba vtedy, ak na oscilátor okrem sily $F = -ky$, ktorá spôsobuje harmonický kmitavý pohyb, nepôsobí žiadna iná sila. Na reálne oscilátory pôsobia aj iné sily, napríklad sila trenia, sila odporu prostredia, atď. Tieto sily spôsobujú, že mechanická energia oscilátora sa mení na iné formy energie. S úbytkom mechanickej energie súvisí zmenšovanie amplitúdy kmitavého pohybu. Kmitavý pohyb, ktorého amplitúda výchylky sa s časom zmenšuje, sa nazýva **tlmený kmitavý pohyb**. Vlastné kmitanie reálneho oscilátora je vždy tlmené. Tlmené kmitanie je vždy neperiodické kmitanie.

Periodická premena energie
Pri harmonickom kmitaní dochádza k periodickým premenám energie oscilátora. V okamihu priechodu rovnovážnou polohou má oscilátor **maximálnu veľkosť rýchlosti a teda aj maximálnu kinetickú energiu**. V okamihu, **keď dosiahne krajné polohy svojho pohybu, má nulovú rýchlosť a maximálnu hodnotu potenciálnej energie** (potenciálna energia pružnosti pre teleso na pružine, potenciálna energia polohy pre kyvadlo).



Zavesením telesa na pružinu v rovnovážnej polohe vo výške h získa oscilátor kľudovú potenciálnu energiu – ťiažovú E_{pt} (zdvihnutím telesa do výšky h) a pružnosti E_{pt} (deformácia pružiny). Potenciálna energia pružnosti sa rovná práci spotrebovanej pružinou pri predĺžení o dĺžku Δl. Pri tejto deformácii pôsobiaca sila postupne rastie, až do svojej maximálnej hodnoty $k.\Delta l$. Práca je rovná obsahu trojuholníka v grafe, teda:

$$E_{pr} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

Vzhľadom k tomu, že pre tiažovú potenciálnu energiu platí vzťah $E_{pt} = mgh$, je pokojová energia $E_0 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + mgh$. Zdvihnutie telesa do výšky h a zavesenie na pružinu, ktorá sa po zavesení telesa predĺži o Δl.

Ak uvedieme mechanický oscilátor do kmitavého pohybu, jeho celková energia sa zväčší o energiu kmitavého pohybu. Pri určitej okamžitej výchylke má oscilátor výchylku y a veľkosť okamžitej rýchlosti v. Pre jeho celkovú energiu môžeme písať:

$$E_{celková} = mg(h+y) + \frac{1}{2}k(\Delta l - y)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Fakt, že sa líši znamienko okamžitej výchylky y v tvare výrazu potenciálnej energie pružnosti a tiažovej potenciálnej energie, vyplýva z fyzikálnej podstaty problému. Ak rastie tiažová potenciálna energia oscilátora, závažie na pružine stúpa vyššie a zmenšuje sa teda predĺženie pružiny. Pri poklese tiažovej potenciálnej energie, závažie klesá dole a výchylka pružiny sa zväčšuje.

Tento výraz zjednodušme za predpokladu využitia podmienky platiacej v rovnovážnej polohe: $m.g = k.\Delta l$:

$$E_{celková} = mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E_0 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Ak teraz do vzťahu dosadíme okamžité hodnoty výchylky a rýchlosti, dostaneme:

$$E_{celková} = E_0 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E_0 + \frac{1}{2}ky_m^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}mv_m^2 \cos^2 \omega t = E_0 + \frac{1}{2}ky_m^2 = E_0 + \frac{1}{2}mv_m^2 = konšt.$$

Na odvodenie sme využili tieto vzťahy: $v_m = \omega y_m$ a $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

Odvodený vzťah platí všeobecne pre všetky typy mechanických oscilátorov. Výraz $\frac{1}{2}ky_m^2$ predstavuje maximálnu hodnotu potenciálnej energie, výraz $\frac{1}{2}mv_m^2$ maximálnu kinetickú energiu oscilátora. Pri harmonickom kmitavom pohybe sa periodicky mení potenciálna energia kmitania na energiu kinetickú a naopak. Celková energia oscilátora je konštantná.

Príklad:
Hmotný bod koná harmonický kmitavý pohyb určený rovnicou $y(t) = y_m \sin(6\pi t)$. V ktorom čase je jeho kinetické energia tri krát väčšia ako potenciálna ?